GEOMETRIA FRACTAL E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE POTÊNCIA EM UMA TURMA DO PROJOVEM URBANO

Everaldo Roberto Monteiro dos Santos
SEDUC-PA
profmaterms@yahoo.com.br

Jeane do Socorro Costa da Silva
UEPA
jeanescsr@yahoo.com.br

RESUMO

O presente artigo refere-se a uma atividade concernente a turma do ProJovem Urbano. Tal atividade apresenta-se como alternativa metodológica para o estudo de potência do ensino fundamental. A mesma utiliza como objeto de aprendizagem a geometria fractal. Para isso, fez-se necessário, primeiramente, realizar um breve comentário acerca do ProJovem Urbano, enfatizando o programa e seus objetivos. Em seguida destacaremos a geometria fractal, bem como alguns problemas que os alunos possuem em relação ao estudo de potenciação. E por fim, apresentaremos a atividade, demonstrando como a geometria fractal colabora para um ensino significativo na introdução do conceito de potência, além de contribuir para a redução de erros banais que "assombram" o conteúdo proposto.

Palavras – chaves: Potenciação. Geometria fractal. Projovem.

O QUE É O PROGRAMA PROJOVEM URBANO

O ProJovem Urbano é um Programa do governo federal que oportuniza ao jovem a conclusão do ensino fundamental e de aprender uma profissão no período de 18 meses. O público alvo são jovens de 18 a 29 anos, de ambos os sexos, que possuem um nível de alfabetização, mas que ainda não concluíram o ensino fundamental. As turmas são formadas por 30 alunos, em média. Alguns destes alunos possuem apenas o "letramento" e outros, que por algum motivo, não concluíram o ensino fundamental. Essa heterogeneidade, tanto de idade quanto de escolaridade, traz um verdadeiro desafio ao professor que faz parte do Programa. Cada professor lecionar em 5 turmas, com uma carga horária de 2 aulas semanais por turma. Devido a estas características peculiares do Programa, o material didático de matemática busca de forma prática mostrar a importância que a disciplina tem na vida do cidadão, através de exemplos voltados para a realidade do aluno ou utilizando processos lúdicos. Dessa forma, oportuniza ao educando ser co-autor da sua aprendizagem.

Todo o conteúdo de matemática é iniciado por situações problemas, seguindo uma das tendência da Educação Matemática denominada Resolução de Problemas. Dessa forma, aluno tem a “oportunidade de expandir os seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como de ampliar a visão que tem dos problemas, da Matemática e do mundo em geral” (BRASIL, 1998. p. 40).

Este programa tem por finalidade elevar o grau de escolaridade, visando o desenvolvimento humano e o exercício da cidadania, por meio da conclusão do ensino fundamental, de qualificação profissional e do desenvolvimento de experiências de participação cidadã, proporcionando assim a formação integral dos jovens por meio de uma efetiva associação entre:

• Formação Básica, para elevação da escolaridade, tendo em vista a conclusão do ensino fundamental;

• Qualificação Profissional, com certificação de formação inicial;

• Participação Cidadã, com a promoção de experiência de atuação social na comunidade.

Todo o conteúdo curricular da base nacional do ensino fundamental sugerido pelo MEC, que é visto no ProJovem, é apresentado e dividido em seis livros denominados Guia de Estudos das Unidades Formativas, onde o conteúdo Curricular de matemática é apresentado no quarto capítulo dos respectivos Guias de Estudos. Na Unidade Formativa V os alunos têm oportunidade de aprender sobre potenciação e radiciação, entre outros assuntos. O conteúdo sobre potência é apresentado de uma forma singular, utilizando a geometria Fractal.

A GEOMETRIA FRACTAL

"A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica e foram aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador". WIKIPEDIA (2010)

Essa geometria surgiu devido à necessidade de o homem explicar certos objetos geométricos que não conseguiam ser aclarada através da geometria Euclidiana. A própria palavra "fractal,"de origem latina, que significa "fração" ou "quebrado" nos dá uma leve idéia do que sejam esses objetos.

Os fractais são objetos geométricos que ao serem divididos em partes cada vez menores guardam semelhança com os originais, propriedade que os diferencia das outras figuras geométricas. Esta característica recebe o nome de auto-similaridade ou ego-semelhança.

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.

Mandelbrot, o matemático Francês que descobriu os fractais na década de 70 do século passado, constatou que todas essas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre esses objetos e aqueles encontrados na natureza, um atributo observado desses objetos é que a sua dimensão é um número fracionário ou irracional não seguindo os padrões euclidianos dos números inteiros. Outra notável propriedada dessas figuras matemáticas está em relação à área, já que alguns fractais possuem área igual a zero, como é o caso do triângulo de Sierpinski o qual foi utilizado em nosa atividade. Assim, pelo fato de termos desenvolvido a atividade de potência utilizando essa figura, nos prenderemos um pouco mais a esse fractal.

Primeiramente, devemos saber que existem duas categorias de fractais: os geométricos, que repetem continuamente um modelo padrão e os aleatórios, que são feitos através dos computadores. No nosso caso, em particular, foi utilizado um fractal geométrico, como iremos notar através da sua construção.

O Triângulo de Sierpinski (descoberto pelo matemático Waclav Sierpinsky) é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades, tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais; possui área igual a zero; ser auto-semelhante; não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado. Para construirmos, ou melhor, para termos uma noção de como ele é feito, uma vez que é uma figura fractal, a sua construção se torna impossível, de acordo com notaremos ao observar o processo de sua construção.

Uma das maneiras de se obter um triângulo de Sierpinski é através do seguinte algoritmo:

1.Comece com um triângulo equilátero em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, mas qualquer triângulo pode ser usado.

2.Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três cópias e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto.

3.Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente (ver a partir da terceira figura).

O fractal propriamente dito só é obtido quando o processo do algoritmo é repetido infinitas vezes, mas à medida que o número de interações aumenta, a imagem obtida tende a se tornar cada vez mais parecida com o fractal.

Entretando, na atividade não se utilzou esse algoritmo para a obtenção do fractal, pois no livro da Unidade Formativa havia uma outra maneira de se obter o triângulo de Sierpinski. Uma regra simples, sintética, contudo que levava os alunos a perceberem todos os elementos da construção do triângulo e através dessa construção chegarem a idéia de potência utilizando a quantidade de triângulos obtidos.

DIFICULDADE NO ENSINO DE POTÊNCIA

O ensino de potência sempre foi alvo de dificuldade para os alunos. Percebem-se diferentes erros como, por exemplo: calcular a potência é multiplicar a base pelo expoente: $2^3 = 2 \times 3 = 6$ no qual o correto é: $2 \times 2 \times 2 = 8$; efetuam as operações na ordem em que aparecem $(2^3)^2 = (6)^2$. O certo seria: $2^{6;}$ considera que $(-2)^3 = -2^3$, entre outros. Mas, o que está por trás de tantos erros? Seria o ensino repleto de abstrações em matemática? Ou seria a metodologia imposta pelo professor?

Reportamos aos livros didáticos. Percebemos que a potenciação é tratada unicamente como uma multiplicação de fatores iguais. Suas apresentação e definição, no entanto, ocorrem de duas maneiras: a partir da análise de uma multiplicação; a outra, relacionada à teoria dos conjuntos.

As citações as seguir expressam o que os autores dos livros didáticos entendem por potenciação. Conseqüentemente, é assumida por professores e alunos:

Potência de um número é um produto de fatores iguais a esse número. Assim, 16 é uma potência de 2, porque $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ e indicasse da seguinte maneira $16 = 2^4$. Pela própria definição toda potência tem dois ou mais fatores. Logo, 2^0 não tem sentido e, por essa razão, introduzimos, por definição, que qualquer número diferente de zero elevado à potência zero é igual a 1. (GALANTE, 1962, p.36).

ISSN 2178 - 3632
08 a 10 de setembro de 2010
Belém – Pará – Brasil

A matemática, como tradicionalmente vem sendo apresentada, “traz subjacente a idéia de edifício pronto, de obra acabada” (Medeiros, 1987, p.54), onde a busca das soluções das questões não é vivida com o aluno. Este não contribui com seus conhecimentos específicos, não havendo comunicação entre aluno e professor, Isso contribui para que a Educação Matemática se limite apenas a manipulações de fórmulas. Os novos conhecimentos são simplesmente memorizados, não há interação com quaisquer das idéias já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Assim, tais conhecimentos são incorporados de modo arbitrário e não substantivo na sua estrutura cognitiva.

No Brasil, desde as décadas de setenta e oitenta do século passado, o ensino da matemática é alvo da visão tecnicista de educação que, segundo FIORENTINI (1994, p.48,49), o *Tecnicismo-pragmático* procura reduzir a matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los.

D’AMBRÓSIO (1989, p.15) explica que a típica aula de matemática ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa no quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação (...), essa matemática dita formal valoriza o cálculo abstrato, o simbolismo e conseqüentemente a abstração pura, totalmente desvinculada da realidade, deixando de lado a importância dos contextos socioculturais dos alunos e dos seus saberes, formando cidadãos alienados e, conseqüentemente, despreparados para o mercado de trabalho.

Já na abordagem pós-moderna, a concepção mecanicista precisa ser superada, ou seja, não podemos conhecer os elementos separadamente, mas sim nas relações que estabelecem entre si e com os outros, como, por exemplo, o ensino do professor só pode ser compreendido na medida em que estabelece relações com a aprendizagem do aluno e, ainda, que o conteúdo científico que o educador desenvolve só pode ser entendido se estabelecer relações com o seu cotidiano e do aluno.

Dessa forma, compreendemos que era necessária uma investigação para dar respostas às angústias e inquietações para compreender o que acontece com a aprendizagem desses conteúdos, em especial, a potenciação, os quais levam os alunos a cometerem tantos erros. E, assim apresentamos o estudo de potências através da geometria fractal.

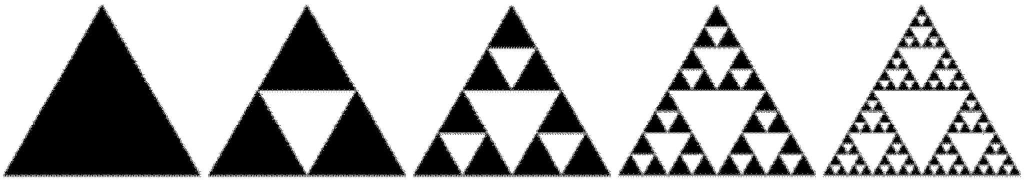
A ATIVIDADE: UTILIZANDO A GEOMETRIA FRACTAL PARA INTRODUZIR O CONCEITO DE POTÊNCIA

Em todas as turmas utilizou-se o mesmo procedimento para introduzir a atividade. A princípio, fez-se uma breve revisão sobre um problema que induziria os alunos a construirem o conceito de potência reportando o conhecimento prévio da aula anterior.

A atividade revisada era do tipo: “se duas pessoas contam uma história, cada uma conta para duas pessoas e essas outras duas contam, cada uma, para duas pessoas...” Um problema simples, contudo chamou bastante atenção e serviu para introduzir a idéia de pontência de forma informal. Em seguida, foi solicitado que os alunos lessem a situação problema de número 14 do livro 5 (a qual estávamos trabalhando), que se inicia com uma breve introdução sobre o Triângulo de Sierpinsky. Logo após essa introdução, havia a seguinte regra: *“dividir o triângulo em 4 partes iguais e retirar a parte central. A cada triângulo restante é aplicada a mesma regra, infinita vezes.”*

Um comando bem compacto, entretando suficiente para a realização da atividade. A única dificuldade era a frase “infinita vezes”. Foi preciso explicar para os alunos que iríamos desenhar até a fase quatro, ou seja, não iríamos repetir infinitamante o algoritmo, uma vez que isso seria impossível. Entretando, deixou-se claro a importância de se repetir o maior número de vezes o procedimento para se chegar a construção do triângulo de Sierpinski.

Logo abaixo havia os seguintes desenhos:



fase 1 fase 2 fase 3 fase 4 fase 5

Deixamos que os alunos observassem os desenhos por aproximadamente 5 minutos. Após essa observação, induzimos os alunos a perceberem que o triângulo da fase 1 possuia todos os lados iguais, ou seja, que era um triângulo equilatero. Induzimos, também, a notarem o triângulo da fase 2 como sendo formado por três triângulos equiláteros, uma vez que o triângulo central havia sido “retirado” . Logo surgiu o seguinte comentário: “que o triângulo branco - assim eles chamaram para a parte do triangulo da fase 1 que havia sido retirada- tocava no ponto médio dos lados do triângulo maior”.

Com essa observação eles chegaram à conclusão prévia de que cada lado dos triângulos, que eram formados dentro de um triângulo maior, era exatamente igual a medade do lado desse triângulo. Pedimos para que os alunos verificassem se essa propriedade também acontecia nas demais fases. Logo, eles notaram que se um triângulo “toca” outro triângulo no “ meio” de um triângulo equilátero, ele também será equilátero. É evidente que já haviam sido trabalhados os conceitos do tipo triângulo equilátero e ponto médio, o que serviram de conhecimento prévio para que os alunos não tivessem dificuldades nos conceitos de geometria euclidiana, os quais seriam utilizados naquele momento.

Sugerimos, então, que eles, sem olhar para o livro, desenhasem o triângulo de Sierpinsky até a fase quatro, ou seja, que eles fossem desenhando triângulos equiláteros dentro de triângulos equiláteros e retirar a parte central até formar triângulos em que um dos seus lados fosse a oitava parte do lado do triângulo original que eles haviam desenhado. Utilizando régua e lápis, começaram a desenhar em folhas de papel A4. Sugerimos que eles pintassem com o próprio lápis os triângulos que estavam formando.

Assim que os alunos acabaram de fazer o que havíamos solicitado, pedimos para que eles contassem os triângulos que eles haviam pintado. O resultado da contagem foi igual para todos os alunos, algo que surpreendeu devido ao grau de dificuldade dos alunos em ralação ao conteúdo de potência. Eles demonstraram que a atividade facilitou a interpretação do conteúdo. O resultado dos desenhos foi o seguinte: Na fase 1 verificou-se que havia ficado 1, já que não se retirou nenhuma parte; na fase 2, com a retirada do triângulo do centro, sobrou 3 partes; na fase 3 foram retirados três triângulos equiláteros dos três que sobraram e com essa operação, sobraram 9 triângulos. Na última fase solicitada, com a retirada dos triângulos equiláteros verificou-se que havia sobrado 27 triângulos equiláteros.

Pediu-se para que os alunos retornassem ao livro e que completassem a seguinte tabela :

Fase	Número de Triângulos	
1	1	3^0
2		3^1
3	9	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Alguns completaram a tabela somente depois da intervenção do professor; outros, porém logo perceberam que para completá-la, bastava multiplicar sucessivamente o resultado anterior da segunda coluna por 3.

Percebemos, pórem, que o resultado em forma de potência estava sendo colocado de forma mecânica, isso é, quando eram colocados na coluna indicada para este fim. Outros alunos haviam descoberto o padrão presente nas potências, ou seja, alguns alunos haviam percebido que o número correspondente ao triângulo da primeira fase era o 1 e que na tabela das potências aparecia 3^0 e que na tabela correspondende aos triângulos da segunda fase aparecia o 3, o que correspondia na coluna das potências a 3^1. Mesmo apartir da fase 5, onde eles não visualizavam mais no triângulo que eles haviam construído nem no livro da Unidade Formativa, alguns alunos continuaram completando a tabela com a quandidade certa de triângulos e potências.

Nesse momento, percebeu-se que a turma já estava prepara para a formalização da definição de potenciação. Para isso, não se usou a idéia comum de que a potenciação é apenas a multiplicação de números iguais.Utilizamos a idéia de quandidade, já que a atividade que os alunos haviam desenvolvido havia criado um ambiente proprício para esse tipo de abordagem, ou seja, que aqueles números que haviam aparecido usando o triângulo Sierpinski eram a representação matemática da quandidade de triângulos que poderíamos obter usando apenas a regra apresentada no livro e que aqueles números que eram produtos de números que apareceram em função da quandidade de triângulos possuiam uma simbologia e termos adequados.

Formalizamos, então, a definição de potência e seus respectivos conceitos, simbolos e nomenclaturas, concretizando a aprendizagem do aluno e a abstração matemática.

A GEOMETRIA FRACTAL E A POTÊNCIA: UNIÃO NECESSÁRIA PARA A COMPREENSÃO DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO

Qual o professor que nunca se deparou com o seguinte erro: $(3)^2 = 6$? Erros como este que “assombram” o ensino de potência e perpassam por vários anos, sendo presente nos ensinos fundamental, médio e superior. Perguntas e indagações devem ser feitas pelo educador, como pro exemplo, “Será que algum conhecimento foi realmente aprendido pelo aluno? (...) Será que ele compreendeu

ISSN 2178 - 3632
08 a 10 de setembro de 2010
Belém – Pará – Brasil

o que representa o conhecimento matemático (...) e a relação com o seu dia-a-dia?”

O erro ou a dificuldade que o aluno tem em aprender determinado conteúdo deve ter um papel fundamental na prática do professor, principalmente na condução de sua técnica docente e jamais ser um instrumento para reprovar ou reter os alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Selecionar, classificar, filtrar e reprovar ou aprovar indivíduos para isto ou para aquilo não são missões do educador (D’ Ambrósio, 1996, p. 17)

O assunto de potência ainda é revisto pelo professor como algo mecânico e exato, pois não assegura a ligação entre teoria e prática e nem participação ativa e criativa dos alunos para mostrar sua capacidade de propor soluções. É com base nesse ensino frustrado que apresentamos nossa atividade para quebrar barreira e levar significado para o aprendizado do educando.

É papel da escola se qualificar e do estado, desencadear projetos para receberem sua clientela – o corpo discente.

Com objetivo de trazer melhorias para esse ensino defasado, o ProJovem Urbano vem contribuir para que o ensino de matemática tenha êxito na formação do aluno.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática – ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D’AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. In **cadernos CEDES.** Historia e Educação Matemática. Campina: Papirus n 40, 1996.96 p. p 7 – 17..

D’AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil**.Zetetiké. Campinas: UNICAMP, ano 3, n.4, 1-36, 1995.

GALANTE, Carlos. **Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 1962.

MEDEIROS, C. (1987). Por uma Educação Matemática com a Intersubjetividade. In: Bicudo, M. (1987), **Educação Matemática**, S. Paulo, Cortez.

SALGADO, Maria.U.C. **Guia de Estudo:Unidade Formativa V** , AMARAL, A. (Org), Brasilia, 2009